Απειροστικός 2
08/04/2019

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $F:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$, F ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,b]$ αν-ν F ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,c]$ και στο $[c,b]$ (όπου $c\in(\alpha,b)$) Τότε:

$$\int_\alpha^b F(x)\,dx = \int_\alpha^c F(x)\,dx + \int_c^b F(x)\,dx$$

Απόδειξη: "$\Longleftarrow$" τυπος $\checkmark$

"$\Longrightarrow$" Έστω ότι F ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,b]$

Έστω $\varepsilon>0 \xrightarrow[\text{Riemann}]{\text{κριτήριο}} \exists\, P$ διαμέριση του $[\alpha,b]$ τω $U(F,P)-L(F,P)<\varepsilon$

Έστω $Q=P\cup\{c\}$ θέτουμε

$P_1=\{y\in Q: y\le c\}=Q\cap[\alpha,c]$

$P_2=\{y\in Q: y\ge c\}=Q\cap[c,b]$

Είχαμε δείξει ότι:

$$(*)\begin{cases} U(F,Q)=U(F,P_1)+U(F,P_2)\\ L(F,Q)=L(F,P_1)+L(F,P_2)\end{cases}$$

$U(F,Q)\le U(F,P)<L(F,P)+\varepsilon\le$
$L(F,Q)+\varepsilon \Rightarrow U(F,Q)-L(F,Q)<\varepsilon$

$$\underbrace{[U(F,P_1)-L(F,P_1)]}_{\ge 0}+\underbrace{[U(F,P_2)-L(F,P_2)]}_{\ge 0}<\varepsilon$$

Q εκλέπτυνση της P, P_1: διαμέριση του $[\alpha,c]$
P_2: διαμέριση του $[c,b]$

$\Rightarrow U(F,P_1) - L(F,P_1) < \varepsilon \xrightarrow[\text{Riemann}]{\text{κριτήριο}}$ F ολοκλ. στο $[\alpha, c]$

$U(F,P_2) - L(F,P_2) < \varepsilon$ F ολοκλ στο $[c,b]$

Πόρισμα: Αν $F\,[\alpha,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρ. στο $[\alpha,b]$ και $[c,d] \subseteq [\alpha,b]$ τότε F ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$

Απόδειξη: F ολοκλ. στο $[\alpha,d] \Rightarrow$ F ολοκληρ. στο $[c,d]$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $F:[\alpha,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Αν F ολοκληρώσιμη στο $[\alpha+h,b]$ $\forall h>0$ (ομοίως στο $[\alpha, b-h]$)
τότε η F είναι ολοκληρ. στο $[\alpha,b]$
και ισχύει $\lim_{h\to 0^+} \int_{\alpha+h}^{b} F(x)dx = \int_{h-b}^{b} F(x)dx$

(ομοίως $\int_{\alpha}^{b} F(x)dx = \lim_{h\to 0^+} \int F(x)^{\alpha} dx$)

Απόδειξη: Έστω $M = \sup_{[\alpha,b]} F$ (1) $\in \mathbb{R}$ $\quad m = \inf_{[\alpha,b]} F \in \mathbb{R}$

είναι οποιοσδήποτε αριθμός για $\neq 0$

Έστω $\varepsilon>0$. Έστω $0<h<\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$ κριτήριο Riemann
$\exists$ P διαμέριση του $[\alpha+h,b]$ τ.ω

$U(F,P) - L(F,P) < \frac{\varepsilon}{2}$

Αν $P: \alpha+b = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ θεωρώ τη διαμέριση
$Q = P \cup \{\alpha\}$ του $[\alpha,b]$ $Q: a = x_0 < x_1 = a+h < x_2 < \dots < x_n = b$

$U(F,Q) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1},x_i]} F = (x_1 - x_0) \sup_{[x_{i-1},x_i]} F$
$+ \sum_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1},x_i]} F = h \sup_{[\alpha,a+h]} F + U(F,P)$

Ομοίως $L(F,Q) = h \cdot \inf_{[\alpha,\alpha+h]} F + L(F,P)$

$$\Rightarrow U(F,Q) - L(F,Q) = h\left(\sup_{[\alpha,\alpha+h]} \overset{\overset{M}{\vee\!\!/}}{F} - \inf_{[\alpha,\alpha+h]} \overset{\overset{m}{\wedge\!\!/}}{F}\right)$$

$$+ \left(U(F,P) - L(F,P)\right)$$

$$< (M-m)\cdot h + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\xrightarrow[\text{Riemann}]{\text{κριτήριο}}$ F ολοκληρ.

- $$\int_\alpha^b F(x)dx - \int_{\alpha+h}^b F(x)\,dx = \int_\alpha^{\alpha+h} F(x)dx$$

Όμως $m \le F(x) \le M \quad \forall x \in [\alpha,b] \Rightarrow$

~~και~~ $m \cdot h \le \int_\alpha^{\alpha+h} F(x)dx \le M h$

$\xrightarrow[\text{συναρτήσεις}]{\text{ισοσυγκλίνουσες}}$ $\lim_{h\to 0} \int_\alpha^{\alpha+h} F(x)d\,x = 0$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $F:[\alpha,b] \to [m,M]$ ολοκληρ., $\varphi:[m,M]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η $\varphi\circ F$ είναι ολοκλ. στο $[\alpha,b]$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν F, g ολοκληρώσιμες στο $[\alpha,b]$ τότε $|F|$, F^2, $F\cdot g$ ολοκληρώσιμες στο $[\alpha,b]$

$$F\cdot g = \tfrac{1}{2}\left[(F+g)^2 - F^2 \cdot g^2\right]$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: (Τριγωνική ανισότητα) Αν F ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,b]$ τότε $\left|\int_\alpha^b F(x)dx\right| \le \int_\alpha^b F(x)d\,x$

Απόδειξη: $|-F(x)| \le F(x) \le |F(x)| \quad \forall x\in[\alpha,b]$

$$\Rightarrow -\int_\alpha^b |F(x)|dx \le \int_\alpha^b F(x)dx \le \int_\alpha^b |F(x)|dx$$

$$\Rightarrow \left|\int_\alpha^b F(x)dx\right| \le \int_\alpha^b |F(x)| \, dx$$

Λημμα Εστω $g: [\alpha,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και έστω οτι $\forall x,y \in [\alpha,b]$ ισχύει $|g(x)-g(y)| \leq M$ (οπου $M>0$) Τοτε $\sup_{[\alpha,b]} g - \inf_{[\alpha,b]} g \leq M$

Αποδειξη: Εστω $\varepsilon>0$. $\exists x_\varepsilon, y_\varepsilon \in [\alpha,b]$ τ.ω $g(x_\varepsilon) > \sup_{[\alpha,b]} g - \varepsilon$

και $g(y_\varepsilon) < \inf_{[\alpha,b]} g + \varepsilon \Longrightarrow g(x_\varepsilon) - g(y_\varepsilon) >$

$\sup_{[\alpha,b]} g - \inf_{[\alpha,b]} g - 2\varepsilon$. $\quad g(x_\varepsilon) - g(y_\varepsilon) \leq |g(x_\varepsilon)-g(y_\varepsilon)| \leq M$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \quad \sup_{[\alpha,b]} g - \inf_{[\alpha,b]} g \leq M + 2\varepsilon$

$\Rightarrow \sup_{[\alpha,b]} g - \inf_{[\alpha,b]} g \leq M$

Αποδειξη (Θεωρηματος) Εστω $\varepsilon>0$. Η φ ομοιομορφα συνεχης στο $[m,M] \to \exists \delta>0$ τ.ω $\forall \xi, \zeta \in [m,M]$ με $|\xi-\zeta|<\delta$ να ισχυει $|\varphi(\xi)-\varphi(\zeta)| < \varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2(b-\alpha)}$

Χωρις βλάβη της γενικοτητας $\delta < \dfrac{(b-\alpha)}{2M}\varepsilon_1$, όπου

$M = \max_{[\alpha,b]} |\varphi|$

$\exists$ P διαμέριση του $[\alpha,b]$ τ.ω $U(F,P) - L(F,P) < \delta^2$
P: $\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ Ορίζω:
$I = \{ i \in (1,\dots,n) : \sup_{[x_{i-1},x_i]} F - \inf_{[x_{i-1},x_i]} F < \delta \}$

$J = \{ \quad -\|- \quad\quad -\|- \quad\quad -\|- \quad \geq \delta$

- Για $i \in I$: $\forall x,y \in [x_{i-1},x_i]$, $|F(x)-F(y)| < \delta$
$\Rightarrow |\varphi(F(x)) - \varphi(F(y))| < \varepsilon_1 \quad (\forall x,y \in [x_{i-1},x_i])$

$\xrightarrow{\text{Λημμα}} \sup_{[x_{i-1},x_i]} (\varphi \circ F) - \inf_{[x_{i-1},x_i]} (\varphi \circ F) \leq \varepsilon_1$

$\cdot$ Για $i \in J$: $\delta \sum_{i=J} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=J} (\sup_{(x_{i-1}, x_i)} F - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} F)$

$\leq \sum_{i=1}^{n} (\sup_{[x_{i-1}, x_i]} F - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} F)(x_i - x_{i-1}) = U(F,P) - L(F,P) \leq \delta^2$

$\delta \sum_{i \in J} (x_i - x_{i-1}) \leq \delta^2 \Rightarrow \sum_{i \in J} (x_i - x_{i-1}) < \delta$

Όμως $\forall x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, $|\varphi(F(x)) - \varphi(F(y))| \leq$
$|\varphi(F(x))| + |\varphi(F(y))| \leq 2M$

$\Rightarrow \sum_{i \in J} (x_i - x_{i-1})(\sup_{[x_{i-1}, x_i]}(\varphi \circ F) - \inf_{[x_{i-1}, x_i]}(\varphi \circ F)) \overset{\text{Λήμμα}}{\leq}$

$2M \sum_{i \in J} (x_i - x_{i-1}) < 2M\delta < 2\cancel{M} \frac{(b-a)\varepsilon_1}{2\cancel{M}} < \underbrace{\varepsilon_1 (b-a)}_{\varepsilon/2}$

$\sum_{i \in I} (x_i - x_{i-1})(\sup_{[x_{i-1}, x_i]}(\varphi \circ F) - \inf_{[x_{i-1}, x_i]}(\varphi \circ F)) \leq \sum_{i \in I} (x_i - x_{i-1}) \varepsilon_1$

$\cancel{= \varepsilon_1 (b-a) = \frac{\varepsilon}{2}}$

$\cancel{U(\varphi \circ F, P) - L(\varphi \circ F, P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]}(\varphi \circ F) - \inf (\varphi \circ F)}$

$= \sum (x_i - x_{i-1})(\sup_{[x_{i-1}, x_i]}(\varphi \circ F) - \inf_{[x_{i-1}, x_i]}(\varphi \circ F)) + \sum_{i \in J} (\dots) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\xrightarrow[\text{Riemann}]{\text{κριτήριο}}$ $\varphi \circ F$ ολοκληρώσιμη

Σύμβαση: $a < b$, $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, θέτουμε

$\int_b^a F(x)dx = -\int_a^b F(x)dx$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν F ολοκληρώσιμη στο $[\alpha+h, b]$ ομοίως στο $[\alpha, b-h]$ $\forall\, h>0$, τότε η F ολοκληρ. στο $[\alpha, b]$ και ισχύει

$$\int_\alpha^b F(x)\,dx = \lim_{h\to 0^+}\int_{\alpha+h}^{b} F(x)\,dx = \lim_{h\to 0^+}\int_{\alpha}^{b-h} F(x)\,dx$$

Εφαρμογή ① Έστω $F:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη και συνεχής παντού εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία. Τότε F ολοκληρώσιμη

Απόδειξη: Έστω $\alpha \le c_1 < c_2 < \dots < c_n \le b$ τα σημεία ασυνέχειας της F. Αρκεί νδο η F είναι ολοκλ. σε κάθε διάστημα της μορφής $[c_{i-1}, c_i]$ $i = 2, \dots, n$

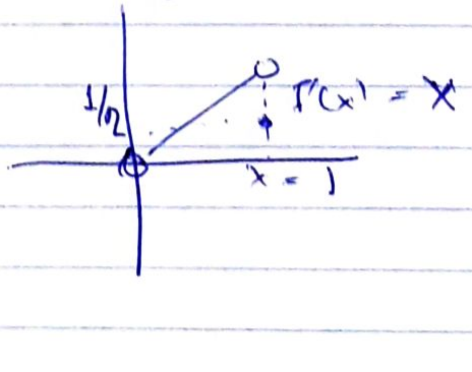
Έστω $h>0$, Για $t>0$, η F είναι συνεχής στο $[c_{i-1}+t, c_i-h] \Rightarrow F$ ολοκληρώσιμη στο $[c_{i-1}+t, c_i-h] \xrightarrow[\text{πρόταση}]{F \text{ φραγμένη}} F$ ολοκληρώσιμη στο $(c_{i-1}, c_i-h] \xrightarrow[\text{πρόταση}]{F \text{ φραγμένη}} F$ ολοκληρώσιμη στο $[c_{i-1}, c_i]$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ $F(x) = \begin{cases} 1/x, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ συνεχής άρα ολοκληρ. στο $[h,1]$ $\forall\, h>0$

$\xrightarrow{?}$ F ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$

Όχι γιατί η F δεν είναι φραγμένη

Εφαρμογή ② Έστω F ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,b] \overset{?}{\Rightarrow} \exists \max_{[\alpha,b]} F$ και $\min_{[\alpha,b]} F$;



Έστω $F(x) = \begin{cases} x & \in (0,1) \\ 1/2 & x=0 \text{ ή } x=1 \end{cases}$

$\inf_{x\in[0,1]} F(x) = 0 \qquad \sup_{x\in[0,1]} F(x) = 1$

Όμως $\nexists\ \xi\in[0,1]$ τ.ω $F(\xi)=0$ ή $F(\xi)=1$

Άρα η F δεν λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή

Όμως η F ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ από εφαρμογή 1

• Αν αλλάξω την τιμή μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης σε πεπερασμένο πλήθος σημεία το ολοκλήρωμά της δεν αλλάζει

$$\int_0^{1-h} F(x)dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^{1-h} F(x)\,dx \qquad \left|\ \int_t^{1-h} x\,dx \quad \frac{(1-h)^2-t^2}{2}\ \right|$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{(1-h)^2-t^2}{2} = \frac{(1-h)^2}{2}$$

$$\int_0^1 F(x)dx = \lim_{h\to 0^+}\int_0^{1-h} F(x)dx = \lim_{h\to 0^+}\frac{(1-h)^2}{2} = 1/2$$

Εφαρμογή 3 $\quad F(x) = \begin{cases} \sin 1/x, & x\in[-1,1]\setminus\{0\} \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Φραγμένη και συνεχής παντού εκτός από $x=0 \Rightarrow$ F ολοκλ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Έστω $F:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και $g:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ ολοκλ.
Τότε $\exists\ \xi\in\underset{(\alpha,b)}{[\alpha,b]}$ τ.ω $\int_\alpha^b F(x)g(x)dx = F(\xi)\int_\alpha^b g(x)dx$

Απόδειξη: Έστω $m = \min_{[\alpha,b]} F$, $M = \max_{[\alpha,b]} F$

$\Rightarrow m \leq F(x) \leq M \quad \forall x \in [\alpha, b]$

$\Rightarrow m\, g(x) \leq F(x) g(x) \leq M g(x), \quad \forall x \in [\alpha, b]$

$\Rightarrow m \int_\alpha^b g(x)dx \leq \int_\alpha^b F(x)g(x)dx \leq M \int_\alpha^b g(x)dx$

Ορίζω τη συνάρτηση $h(x) = \int_\alpha^b g(x)dx\, F(x)$, συνεχής

στο $[\alpha, b]$ $\max_{[\alpha,b]} h = M \int_\alpha^b g(x)dx$

$\min_{[\alpha,b]} h = m \int_\alpha^b g(x)dx$

$\xrightarrow[\text{τιμής}]{\text{Θ. Ενδ.}} \exists \xi \in [\alpha, b],\ F(\xi) \int_\alpha^b g(x)dx = \int_\alpha^b F(x)g(x)dx$